MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE ET
DE LA JEUNESSE

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

EAI MAT 2

SESSION 2020

AGRÉGATION CONCOURS INTERNE ET CAER

Section : MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.

A

Tournez la page S.V.P.

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

► **Concours interne de l'Agrégation de l'enseignement public** :

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAI	1300A	102	0530

► **Concours interne du CAER / Agrégation de l'enseignement privé** :

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAH	1300A	102	0530

Notations

- $\triangleright$ On rappelle que l'on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs ou nul, $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers relatifs, $\mathbb{Q}$ le corps des nombres rationnels, $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.

- $\triangleright$ On se place dans un espace euclidien $(E, \langle . \, , . \rangle)$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

- $\triangleright$ Pour tout vecteur x de E et tout réel positif r, on note $B(x,r)$ (resp. $\overline{B}(x,r)$, resp. $S(x,r)$) la boule ouverte (resp. la boule fermée, resp. la sphère) de centre x et de rayon r :

$$B(x,r) = \{y \in E \mid \|y-x\| < r\}\,,\ \overline{B}(x,r) = \{y \in E \mid \|y-x\| \leqslant r\} \quad \text{et} \quad S(x,r) = \{y \in E \mid \|y-x\| = r\}\,.$$

- $\triangleright$ Pour toute partie A de E, on note $\mathring{A}$ l'intérieur de A, c'est-à-dire le plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) inclus dans A, $\overline{A}$ l'adhérence de A, c'est-à-dire le plus petit fermé contenant A et $\mathrm{Fr}\,(A)$ la frontière de A :

$$\mathrm{Fr}\,(A) = \overline{A} \backslash \mathring{A}.$$

- $\triangleright$ Si a est un élément de E, on note $\mathscr{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.

- $\triangleright$ Pour toute partie fermée et non vide F de E et tout $x \in E$, on admet sans démonstration que l'ensemble

$$\{\|x-f\| \ ,\ f \in F\}$$

admet une borne inférieure notée $\inf\limits_{f \in F} \|x-f\|$ et on pose

$$d_F(x) = d(x,F) = \inf_{f \in F} \|x-f\|\,.$$

- $\triangleright$ On pose alors $\Gamma(x) = \{f \in F \mid \|x-f\| = d(x,F)\}$. C'est donc l'ensemble (éventuellement vide) des points de F pour lesquels la borne inférieure est atteinte.

- $\triangleright$ **Lorsque $\Gamma(x)$ est un singleton, on note $\pi(x)$ son unique élément.**

- $\triangleright$ Si u et v sont deux vecteurs de E, on appelle segment $[u,v]$ l'ensemble défini par :

$$[u,v] = \{x \in E \mid \exists t \in [0,1],\ x = (1-t)u + tv\}\,.$$

- $\triangleright$ Soient A une partie de E et $u : A \to \mathbb{R}$. On suppose que $0 \in \overline{A}$. On dit que $u(h) = \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|)$ lorsqu'il existe une fonction δ définie sur un voisinage V de 0 telle que

$$\forall h \in V \cap A,\ u(h) = \delta(h)\,\|h\| \quad \text{et} \quad \delta(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

- $\triangleright$ Soient Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On rappelle que l'on dit que f est différentiable en un élément a de Ω lorsqu'il existe une forme linéaire $\ell : E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|)\,.$$

Lorsqu'elle existe, ℓ est unique et est notée $df(a)$ et l'image $\ell(h)$ du vecteur h de E par ℓ est notée $df(a) \cdot h$. Le gradient de f en a est alors l'unique vecteur v de E vérifiant :

$$\forall h \in E,\ df(a) \cdot h = \langle v,\, h \rangle\,.$$

On le note $\nabla f(a)$. Ainsi, sous réserve d'existence, on a :

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a),\, h \rangle + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|)\,.$$

- $\triangleright$ Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.

Le problème a pour objectif d'étudier la différentiabilité de la fonction $d_F : x \mapsto d(x, F)$ en fonction de la partie F.

On fixe donc une partie F de E **non vide** et **fermée**.

Partie I — Résultats préliminaires

1. Montrer que, pour tout vecteur x de E, $d_F(x) = 0$ si et seulement si $x \in F$.

2. **a)** Montrer que, pour tout $(x, y) \in E^2$ et tout $f \in F$, on a :

$$d_F(y) \leqslant \|y - x\| + \|x - f\| .$$

b) En déduire que d_F est 1-lipschitzienne.

3. Soient x un vecteur de E et x_0 un vecteur de F. On pose $r = \|x - x_0\|$ et $K = \overline{B}(x, r) \cap F$.

a) Montrer que K est une partie compacte et non vide de E.

b) Montrer que $\Gamma(x)$ est non vide.

4. On suppose, *dans cette question seulement*, que F est en outre une partie convexe de E.

a) Montrer que, quels que soient les vecteurs u et v de E, on a : $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$.

b) Soit x un vecteur de E et soient f et f' deux éléments de $\Gamma(x)$. On suppose que $f \neq f'$.

Montrer que : $\left\|\frac{1}{2}(f + f') - x\right\|^2 < d(x, F)^2$.

En déduire que, pour tout vecteur x de E, $\Gamma(x)$ est un singleton.

Ainsi, avec les notations de l'introduction, $\Gamma(x) = \{\pi(x)\}$.

c) On souhaite montrer que : $\forall x \in E, \forall f \in F, \langle f - \pi(x), x - \pi(x)\rangle \leqslant 0$.

Pour cela, on fixe des éléments x de E et f de F. On introduit la fonction

$$\varphi : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \|(1-t)\pi(x) + tf - x\|^2 \end{cases} .$$

i. Montrer que φ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2.

ii. Justifier que φ admet un minimum en 0. Conclure.

d) On fixe un vecteur x de E. Soit z un vecteur de F. On suppose que :

$$\forall f \in F, \langle f - z, x - z\rangle \leqslant 0 .$$

Montrer que $z = \pi(x)$.

Partie II — Étude en dimension 1

On suppose, *dans toute cette partie*, que $E = \mathbb{R}$, et que $\mathbb{R}$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

5. Expliciter $d_{\{0\}}$, puis déterminer l'ensemble des points où $d_{\{0\}}$ est dérivable et déterminer sa dérivée.

Dans les questions 6 à 10, on suppose que $F = \mathbb{Z}$ et on étudie donc la fonction $d_{\mathbb{Z}}$.

6. Montrer que $\mathbb{Z}$ est fermé dans $\mathbb{R}$.

7. Justifier que $d_{\mathbb{Z}}$ est 1-périodique. Étudier la parité.

8. Pour tout x élément de $[0, 1[$, expliciter, en justifiant, $d_{\mathbb{Z}}(x)$ en fonction de x. Tracer le graphe de $d_{\mathbb{Z}}$.

9. Étudier la dérivabilité de $d_{\mathbb{Z}}$ en tout point de $[0, 1[$.

10. Développement en série de Fourier de $d_{\mathbb{Z}}$.

a) Calculer les coefficients de Fourier de $d_{\mathbb{Z}}$.

b) La série de Fourier de $d_{\mathbb{Z}}$ converge-t-elle simplement/uniformément/normalement vers $d_{\mathbb{Z}}$?

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ puis de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ et de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.
On commencera par justifier la convergence des séries.

Pour toute la suite de la partie, on fixe une partie fermée F de $\mathbb{R}$. On note Ω le complémentaire de F. C'est donc une partie ouverte de $\mathbb{R}$.

11. On définit, sur Ω, une relation binaire $\sim$ de la manière suivante : étant donnés deux éléments x et y de Ω, on dit que x est en relation avec y lorsqu'il existe un intervalle ouvert $]a, b[$ inclus dans Ω et contenant les éléments x et y :

$$\forall (x, y) \in \Omega^2, \quad x \sim y \iff \big(\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a < b \quad \text{et} \quad (x, y) \in]a, b[^2 \quad \text{et} \quad]a, b[\subset \Omega\big) \ .$$

a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

b) Montrer que les classes d'équivalences sont des intervalles ouverts deux à deux disjoints.

c) En déduire qu'il existe une famille $(]a_i, b_i[)_{i \in I}$ d'intervalles ouverts deux à deux disjoints, indexée par un ensemble I fini ou dénombrable, telle que

$$\Omega = \bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[\ .$$

12. Soit x un élément de Ω. Il existe donc un unique i_0 élément de I tel que $x \in]a_{i_0}, b_{i_0}[$.

a) Exprimer $d_F(x)$ à l'aide de x, de a_{i_0} et b_{i_0}.

b) Étudier la dérivabilité de d_F en x.

13. On suppose dans cette question que $\mathring{F} \neq \varnothing$. Soit x un élément de $\mathring{F}$. Étudier la dérivabilité de d_F en x.

14. Étude à la frontière.

a) On suppose, *dans cette question*, que $F = [0, 1]$. Expliciter $\mathrm{Fr}\,(F)$.
d_F est-elle dérivable en un point de $\mathrm{Fr}\,(F)$?

b) *Dans cette question*, on pose : $F = \mathbb{R}\backslash\Omega$ où $\Omega = \bigcup\limits_{n\geqslant 2} \left]\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right[$, la réunion étant prise sur l'ensemble des entiers naturels n tels que $n \geqslant 2$.

i. Justifier rapidement que $\Omega \subset \left]0, \frac{1}{2}\right[$, que F est un fermé de $\mathbb{R}$ et que $0 \in \mathrm{Fr}\,(F)$.

ii. Soit $x \in \Omega$. Montrer qu'il existe un unique entier naturel n tel que $n \geqslant 2$ et $x \in \left]\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right[$.
Montrer que $n = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

iii. En déduire qu'il existe un réel C strictement positif tel que $\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, $d_F(x) \leqslant Cx^3$.

iv. Montrer que d_F est dérivable à droite en 0 et en calculer $(d_F)'_d(0)$.

v. d_F est-elle dérivable en 0 ?

Partie III — Étude de cas particuliers en dimension n

15. On fixe un vecteur x_0 de E et on suppose, *dans cette question seulement*, que $F = \{x_0\}$.

a) Expliciter d_F. Soit x un élément de E. Expliciter $\Gamma(x)$.

b) Montrer que la fonction $g\colon \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \|x - x_0\|^2 \end{cases}$ est différentiable sur E et calculer son gradient.

c) En déduire que d_F est différentiable sur $E\backslash\{x_0\}$ et montrer que :

$$\forall a \in E\backslash\{x_0\}\,,\ \nabla d_F(a) = \frac{1}{\|a - x_0\|}\,(a - x_0)\,.$$

d) Étude de la différentiabilité de d_F en x_0. Supposons que d_F soit différentiable en x_0.

i. Montrer que, pour tout vecteur h de E, on a :

$$d_F(x_0 + th) = t\,\langle \nabla d_F(x_0),\, h\rangle + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)\,.$$

ii. Conclure.

16. On suppose, *dans cette question seulement*, que F est un sous-espace vectoriel de E, distinct de E.

a) Montrer que pour tout vecteur x de E, $\Gamma(x)$ est un singleton, et que π (défini dans le préambule du sujet) est le projecteur orthogonal sur F.

b) Montrer que, pour tout élément a de E, d_F^2 est différentiable en a et calculer son gradient.

c) En déduire que, pour tout élément a de $E\backslash F$, d_F est différentiable en a et calculer son gradient.

d) On fixe un vecteur a de F. L'objet de cette question est l'étude de la différentiabilité de d_F en a.

i. On suppose que d_F est différentiable en a et on pose : $u = \nabla(d_F)(a)$.
Soit $h \in F^{\perp}$. Montrer que : $\langle u,\, h\rangle = \|h\|$.
Indication : *on pourra procéder de manière analogue à la question* 15.d.

ii. Conclure.

17. Dans cette question, on suppose que $E = \mathbb{R}^2$, dont les éléments sont notés en colonne, muni de sa structure euclidienne canonique et que : $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad y \geqslant x^2 \right\}$.

L'objet de cette question est d'étudier la différentiabilité de d_F en $0_{\mathbb{R}^2}$.

a) Dessiner l'allure de F.

b) Montrer que F est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

c) Montrer que $0_{\mathbb{R}^2} \in \mathrm{Fr}\,(F)$.

d) Montrer que, pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^2$, $d_F(u) \leqslant \|u\|^2$.
Indication : on pourra séparer les cas où $u \in F$ et où $u \in \mathbb{R}^2 \backslash F$.

e) En déduire que d_F est différentiable en $0_{\mathbb{R}^2}$ et donner son gradient en $0_{\mathbb{R}^2}$.

Partie IV — Distance à la sphère unité

On suppose, *dans cette partie seulement*, que : $F = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$.

F est donc la sphère de centre 0_E et de rayon 1.

18. Soit a un élément de $E \backslash \{0_E\}$. On pose $u = \dfrac{1}{\|a\|} a$ et on fixe un vecteur y de F.

a) Montrer qu'il existe un plan vectoriel $\mathcal{P}$ contenant a, u et y.

b) Montrer que $S = F \cap \mathcal{P}$ est le cercle unité de $\mathcal{P}$, pour la structure euclidienne sur $\mathcal{P}$ induite par celle de E.

c) Montrer que $\Gamma(a) = \{u\}$.

19. Montrer que, pour tout vecteur a de E : $d_F(a) = |\,\|a\| - 1|$.

20. Montrer que, pour tout vecteur a de E tel que $a \neq 0_E$ et $a \notin F$, d_F est différentiable en a et calculer son gradient.

21. Expliciter $\Gamma(0_E)$.

22. Soit a un vecteur de F. Montrer que d_F n'est pas différentiable en a.
Indication : *On pourra calculer $d_F(a + ta)$, pour tout t élément de* $]-1, 1[$.

23. On fixe un vecteur unitaire v.

a) Étudier la dérivabilité en 0 de $\varphi \colon \begin{cases}]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad t \quad \longmapsto d_F(tv) \end{cases}$.

b) Conclure quant à la différentiabilité de d_F en 0.

Partie V — Une condition nécessaire de différentiabilité à l'extérieur de F

Dans cette partie, on fixe un vecteur a de $E\backslash F$ et on suppose que d_F est différentiable en a.
On souhaite montrer qu'alors :

$$\Gamma(a) \text{ est un singleton et que } \nabla d_F(a) = \frac{1}{d_F(a)}(a - \pi(a)).$$

On pose $u = \nabla d_F(a)$.

24. **a)** Montrer que, pour tout $t > 0$, $d_F(a + tu) - d_F(a) \leqslant t\,\|u\|$.
b) En déduire que $\|u\| \leqslant 1$.

Dans la suite de cette partie, on se donne **un** élément y de $\Gamma(a)$.

25. **a)** Montrer que pour tout $x \in [a, y]$,

$$\|x - y\| = d_F(a) - \|a - x\|\,.$$

b) En déduire que pour tout $x \in [a, y]$,

$$d_F(x) = \|x - y\|\,.$$

26. On fixe $t \in]0, d_F(a)]$ et on pose $v = \dfrac{1}{d_F(a)}(a - y)$.

a) Montrer que

$$d_F(a - tv) = d_F(a) - t.$$

b) Montrer que

$$\langle u,\, v\rangle = 1 = \|u\|\,\|v\|\,.$$

c) En déduire que $u = v$ et conclure.

Partie VI — Étude de la réciproque

Dans cette partie, on fixe $a \in E\backslash F$ et on suppose que $\Gamma\,(a)$ est un singleton. Ainsi, avec les notations du préambule,

$$\Gamma\,(a) = \{\pi(a)\}\,.$$

On souhaite montrer que d_F est différentiable en a et que $\nabla(d_F)(a) = \dfrac{1}{d_F(a)}(a - \pi(a))$.

27. Dans cette question, on se propose de montrer que :

$$\forall V \in \mathscr{V}\,(\pi(a))\,,\, \exists U \in \mathscr{V}\,(a)\,,\, \forall x \in U,\, \Gamma(x) \subset V.$$

On va l'établir à l'aide d'un raisonnement par l'absurde. On suppose donc qu'il existe un voisinage ouvert $V \in \mathscr{V}\,(\pi(a))$ de $\pi(a)$ tel que :

$$\forall U \in \mathscr{V}\,(a)\,,\, \exists x \in U,\, \Gamma(x) \not\subset V\,.$$

On dispose ainsi d'une suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a et d'une suite $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\, y_p \in \Gamma(x_p) \quad \text{et} \quad y_p \notin V.$$

On pose : $M = \sup\limits_{p\in\mathbb{N}} \|x_p - a\|$.

a) Justifier succinctement que M est bien défini, puis montrer que $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée.

On note ℓ une valeur d'adhérence de $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

b) Justifier succinctement l'existence de ℓ.

c) Montrer que $\ell \in F \cap (E\backslash V)$.

d) Montrer que $\ell \in \Gamma(a)$, puis conclure.

28. On pose : $\quad R = \|a - \pi(a)\|$.

a) Justifier que $R > 0$ et expliciter $\overline{B}(a, R) \cap F$.

b) Soit x un élément de $B(a, R)$. On fixe un élément y de $\Gamma(x)$.

On considère la fonction $\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \|(1-t)x + ty - a\|^2 - R^2 \end{cases}$.

i. Montrer que φ est un trinôme du second degré. Que dire du signe des racines de ce trinôme ?

ii. Montrer que $[x, y] \cap S(a, R)$ est un singleton. On note $p(x, y)$ le point d'intersection.
Il existe donc un unique $t_{x,y} \in [0, 1]$ vérifiant : $p(x, y) = (1 - t_{x,y})x + t_{x,y}\, y$.

iii. Que vaut $\varphi(t_{x,y})$? En déduire une expression de $t_{x,y}$.

c) Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in B(a, R),\ \|x - a\| < \eta \implies \forall y \in \Gamma(x),\ \|p(x, y) - y\| < \varepsilon.$$

d) En déduire que :

$$\forall V \in \mathscr{V}\left(\pi(a)\right),\ \exists U \in \mathscr{V}\left(a\right),\ \forall x \in U,\ \forall y \in \Gamma(x),\ p(x, y) \in V\,.$$

29. Pour tout x élément de $B(a, R)$, on note y_x un élément de $\Gamma(x)$. Montrer que :

a) $\forall x \in B(a, R),\ \|x - p(x, y_x)\|^2 - \|a - p(x, y_x)\|^2 = 2\,\langle x - a,\, a - p(x, y_x)\rangle + \|x - a\|^2$;

b) $\|x - p(x, y_x)\|^2 - \|a - p(x, y_x)\|^2 = 2\,\langle x - a,\, a - \pi(a)\rangle + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\left(\|x - a\|\right)$.

30. Montrer que : $\quad d_F^2(x) = d_F^2(a) + \langle x - a,\, 2(a - \pi(a))\rangle + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\left(\|x - a\|\right)$.

31. En déduire que d_F est différentiable en a et calculer son gradient.

32. Soit Ω un ouvert inclus dans $E\backslash F$. On suppose que, pour tout $x \in \Omega$, $\Gamma(x)$ est un singleton.
Montrer que d_F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.

Partie VII — Une condition nécessaire de différentiabilité en un point de F

Dans cette partie, on fixe un élément a de F et on suppose que d_F est différentiable en a. On souhaite montrer que : $\nabla(d_F)(a) = 0$.
On pose encore : $u = \nabla(d_F)(a)$.

33. Montrer le résultat dans le cas où $a \in \mathring{F}$.

34. On se place dans le cas où $a \in \mathrm{Fr}\,(F)$.

a) Montrer que : $d_F(a - tu) = -t\,\|u\|^2 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)$.

b) Conclure.

FIN DU SUJET

Correction de l'épreuve de mathématique II
Agrégation interne 2020
M.TARQI [1] CPGE Med VI-Kénitra- Maroc

Partie I : Résultats préliminaires

1. Soit $x \in E$. On sait que $d_F(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{F}$. Mais $F = \overline{F}$ puisque F est fermé, alors $\forall x \in E,\ d_F(x) = 0 \Leftrightarrow x \in F$.

2. a) Soient $(x, y) \in E^2$ et $f \in F$. On a l'inégalité triangulaire $\|y - f\| \leq \|y - x\| + \|x - f\|$. Or $\inf_{f \in F} \|y - f\| \leqslant \|y - f\|$ donc, par transitivité $\inf_{f \in F} \|y - f\| \leqslant \|y - x\| + \|x - f\|$. Ainsi

$$\forall (x, y, f) \in E \times E \times F,\ d_F(y) \leqslant \|y - x\| + \|x - f\|.$$

b) Soit $(x, y) \in E^2$. D'après la question précédente, on a :

$$\forall f \in F,\ d_F(y) \leqslant \|y - x\| + \|x - f\|.$$

Donc, en passant à la borne inférieure, on obtient $d_F(y) \leqslant \|y - x\| + \inf_{f \in F} \|x - f\|$. Ce qui équivaut successivement à $d_F(y) \leqslant \|y - x\| + d_F(x)$ ou encore $d_F(y) - d_F(x) \leqslant \|y - x\|$. Par symétrie des réels de x et y nous avons aussi bien $d_F(x) - d_F(y) \leqslant \|y - x\|$. D'où

$$|d_F(y) - d_F(x)| \leqslant \|y - x\|.$$

Ainsi

$$\forall (x, y) \in E^2,\ |d_F(y) - d_F(x)| \leqslant \|y - x\|.$$

Autrement dit, d_F est 1-lipschitzienne sur E.

3. a) • $x_0 \in F$ et $x_0 \in \overline{B}(x_0, r)$ donc $x_0 \in \overline{B}(x_0, r) \cap F$ et $\overline{B}(x_0, r) \cap F \neq \emptyset$.

• E est euclidien don E est isomorphe à $\mathbb{R}^n$. Donc les compacts de E sont ses fermés bornés.

• Or $\overline{B}(x_0, r)$ et F sont des fermés donc $\overline{B}(x_0, r) \cap F$ est un fermé et $\overline{B}(x_0, r) \cap F$ est borné puisqu'il est inclus dans $\overline{B}(x_0, r)$, donc $\overline{B}(x_0, r) \cap F$ est une partie compacte et non vide de E.

b) Démontrons l'existence et l'unicité d'un minimum pour d_F sur E.

• Si $f \in F \setminus \overline{B}(x, r)$ alors $\|f - x\| > r = \|x_0 - x\| \geqslant d_F(x)$. Donc si d_F admet un minimum alors celui-ci est forcément atteint pour un élément de K.

• Considérons $\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} K & \to & [0, r] \\ y & \mapsto & \|x - y\| \end{array} \right.$. D'après la deuxième inégalité triangulaire :

$$|\gamma(y) - \gamma(z)| = |\|x - y\| - \|x - z\|| \leqslant \|y - z\|$$

quelque soient y et z dans E. Ainsi γ est 1-lipschitzienne et donc continue sur K. L'image continue d'un compact étant un compact, donc $\gamma(K)$ est un segment de $\mathbb{R}$ et γ atteint ses bornes. Donc il existe $y_0 \in K$ tel que $\inf_{y \in K} \gamma(y) = \gamma(y_0)$.

Des deux points précédents nous déduisons qu'il existe $y_0 \in F$ tel que $\|x - y_0\| = d_F(x)$. $\Gamma(x)$ est donc non vide.

4. a) Soit $(u, v) \in E^2$. $\|.\|$ étant la norme associée au produit scalaire (*i.e.* $\|x\|^2 = (x|x)$), par bilinéarité et symétrie de ce dernier, on a :

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2(u|v) + \|v\|^2$$

et

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2(u|v) + \|v\|^2.$$

En sommant terme à terme les deux précédentes égalités, on obtient l'égalité demandée :

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right).$$

b) En utilisant la formule de la question précédente avec $u = f - x$ et $v = f' - x$, on obtient :

$$\left\|f - x + f' - x\right\|^2 + \left\|f - x - f' + x\right\|^2 = 2\left(\|f - x\|^2 + \left\|f' - x\right\|^2\right).$$

Puisque f et f' réalisent la distance minimale à F, alors

$$\left\|f + f' - 2x\right\|^2 + \left\|f - f'\right\|^2 = 4d_F(x)^2.$$

Comme par hypothèse $f \neq f'$, $\left\|f - f'\right\| > 0$, alors

$$\left\|f + f' - 2x\right\|^2 < 4d_F(x)^2,$$

ce qui équivaut à

$$\frac{1}{4}\left\|f + f' - 2x\right\|^2 < d_F(x)^2,$$

ou encore à

$$\left\|\frac{1}{2}\left(f + f'\right) - x\right\|^2 < d_F(x)^2.$$

Cette dernière inégalité est impossible car elle contredit la caractère minimal de f. En effet F étant supposé convexe, $\frac{1}{2}\left(f + f'\right)$ est un élément de F pour lequel $\left\|x - \frac{1}{2}\left(f + f'\right)\right\| < d_F(x)$.

Nous avons donc démontré en raisonnant par l'absurde qu'il ne peut y avoir qu'un élément dans $\Gamma(x)$.

c) i. Soit $t \in [0, 1]$. On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \|t(f - \pi(x)) + \pi(x) - x\|^2 \\
&= \|t(f - \pi(x))\|^2 + 2\langle t(f - \pi(x))|\pi(x) - x\rangle \\
&\quad + \|\pi(x) - x\|^2 \\
&= \|f - \pi(x)\|^2 t^2 + 2\langle f - \pi(x)|\pi(x) - x\rangle t \\
&\quad + \|\pi(x) - x\|^2.
\end{aligned}$$

Donc φ est une fonction polynomiale de degré 1 ou 2 suivant les valeurs de $\|f - \pi(x)\|$.

---

[1] ⋄ medtarqi@yahoo.fr ⋄ http ://alkendy.x10.mx

ii. Soit $t \in [0,1]$. F est convexe et $(\pi(x), f) \in F^2$ donc $(1-t)\pi(x) + tf \in F$. Puisque $\pi(x)$ réalise la distance minimale à F :

$$\|((1-t)\pi(x) + tf) - x\| \geqslant \|\pi(x) - x\|.$$

Donc, la fonction carré étant croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\varphi(t) \geqslant \varphi(0).$$

Donc la fonction φ admet un minimum égale à $\|\pi(x) - x\|^2$ qui est atteint en 0.

Démontrons maintenant l'inégalité $(f - \pi(x)|x - \pi(x)) \leqslant 0$. Deux cas sont possibles :

• Si $f = \pi(x)$ alors l'inégalité à démontrer est triviale puisque $(f - \pi(x)|x - \pi(x)) = 0$.

• Supposons $f \neq \pi(x)$. Dans ce cas φ est polynomiale de degré deux. La courbe représentative de $\tilde{\varphi}$ prolongement de φ à $\mathbb{R}$, est une parabole convexe (le coefficient dominant est strictement positif).

Comme $\tilde{\varphi}$ admet un minimum en 0 sur $[0,1]$, $\tilde{\varphi}$ est nécessairement strictement croissante sur $[0,1]$. Donc le minimum absolue de $\tilde{\varphi}$ sur $\mathbb{R}$ est atteint en un nombre $t_0 \leqslant 0$, caractérisé par $\tilde{\varphi}'(t_0) = 0$. Compte tenu de l'expression réduite de $\varphi(t)$, $t_0 \leqslant 0$ est équivaut à

$$-\frac{2(f - \pi(x)|\pi(x) - x)}{2\|f - \pi(x)\|^2} \leqslant 0.$$

Donc nécessairement : $(f - \pi(x)|x - \pi(x)) \leqslant 0$.

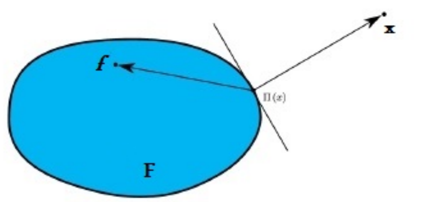

FIGURE 1 – Projection sur un convexe

d) Soit $z \in F$. Considérons la fonction :

$$\varphi_z : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \|(1-t)z + tf - x\|^2 \end{array} \right.$$

En raisonnant comme précédemment, puisque $(f - z|x - z) \leqslant 0$, φ_z est croissante sur $[0,1]$, donc $\varphi_z(0) \leqslant \varphi_z(1)$, c'est-à-dire

$$\|z - x\|^2 \leqslant \|f - x\|^2.$$

Ainsi : $\forall f \in F$, $\|z - x\| \leqslant \|f - x\|$. Autrement dit z est un élément de F qui réalise le minimum de la distance de x à F. $\Gamma(x)$ étant un singleton, nécessairement $z = \pi(x)$.

Partie II : Étude en dimension 1

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $d_{\{0\}}(x) = |x - 0| = |x|$. On en déduit que $d_{\{0\}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $d_{\{0\}}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} -1, & \text{si } t < 0 \\ 1, & \text{si } t > 0 \end{array} \right.$. $d_{\{0\}}$ n'est pas dérivable en 0.

6. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $]n, n+1[$ est un ouvert. Donc : $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (]n, n+1[)$ est un ouvert. D'où : $\complement_{\mathbb{R}} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[\right)$ est un fermé. Autrement dit $\mathbb{Z}$ est un fermé.

7. L'application $\sigma(t) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}, & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x - 1 \end{array} \right.$ est une bijection de $\mathbb{Z}$ sur lui même . Ainsi $d_{\mathbb{Z}}(x+1) = \min_{k \in \mathbb{Z}} |x + 1 - k| = \min_{k \in \mathbb{Z}} |x - (k-1)| = \min_{k \in \mathbb{Z}} |x - \sigma(k)| = \min_{l \in \mathbb{Z}} |x - l| = d_{\mathbb{Z}}(x)$, donc $d_{\mathbb{Z}}$ est 1-périodique.

De même $d_{\mathbb{Z}}(-x) = \min_{k \in \mathbb{Z}} |-x - k| = \min_{k \in \mathbb{Z}} |x + k| = \min_{l \in \mathbb{Z}} |x - l| = d_{\mathbb{Z}}(x)$, donc $d_{\mathbb{Z}}$ est paire.

Soit $x \in [0,1[$ fixé. Si $k < 0$, $|x - k| = x - k \geq x - (-1) = x + 1 \geq x$, de même si $k > 1$, $|x - 1| \geq 1$. Par ailleurs $|x - 0| = x \leq 1$ et $|x - 1| \leq 1 - 0 = 1$. Ainsi,

$$d_{\mathbb{Z}}(x) = \min_{k \in \mathbb{Z}} |x - k| = \min(x, 1 - x).$$

Si $x \in \mathbb{R}$, $x - \lfloor x \rfloor \in [0,1[$ et par conséquent :

$d_{\mathbb{Z}}(x) = d_{\mathbb{Z}}(x - \lfloor x \rfloor) = \min_{k \in \mathbb{Z}} |x - k| = \min(x - \lfloor x \rfloor, 1 - x + \lfloor x \rfloor)$.

8. Puisque $d_{\mathbb{Z}}(x) = \min(x - \lfloor x \rfloor, 1 - x + \lfloor x \rfloor)$, alors

$$d_{\mathbb{Z}}(x) = \left\{ \begin{array}{l} x, \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \\ 1 - x, \text{ si } x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[\end{array} \right. .$$

Le graphe de $d_{\mathbb{Z}}$ se déduit de celui de sa restriction à $[0,1[$ par translation du faite de la 1-périodicité.

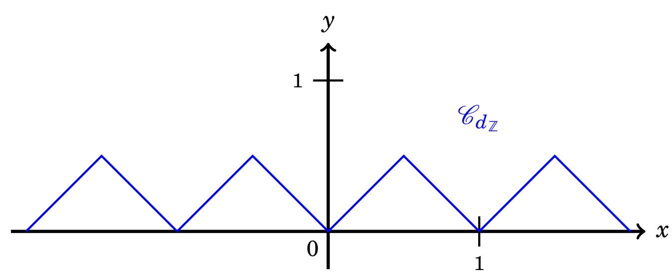

FIGURE 2 – Le graphe de $d_{\mathbb{Z}}$

9. Avec l'expression trouvée à la question précédente il est aisé de déterminer la dérivabilité de $d_{\mathbb{Z}}$:

$$d'_{\mathbb{Z}}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{si } t \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\\ \\ -1, & \text{si } t \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[\end{array} \right. .$$

• $d_{\mathbb{Z}}$ est dérivable à droite en 0 et en $\frac{1}{2}$ et $(d_{\mathbb{Z}})'_d(0) = (d_{\mathbb{Z}})'_d\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

• $d_{\mathbb{Z}}$ est dérivable à gauche en $\frac{1}{2}$ et $(d_{\mathbb{Z}})'_g\left(\frac{1}{2}\right) = -1$. En conclusion $d_{\mathbb{Z}}$ est dérivable sur $[0,1[\setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

10. Développement en série de Fourier de $d_{\mathbb{Z}}$.

a) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Par définition, on a : $c_n(d_{\mathbb{Z}}) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d_{\mathbb{Z}}(t)\mathrm{e}^{-i2n\pi t}\,\mathrm{d}t$. D'après la relation de Chasles :

$$c_n(d_{\mathbb{Z}}) = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} d_{\mathbb{Z}}(t)\mathrm{e}^{-i2n\pi t}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\frac{1}{2}} d_{\mathbb{Z}}(t)\mathrm{e}^{-i2n\pi t}\,\mathrm{d}t.$$

En procédant à un changement de variable d'intégration :

$$c_n(d_{\mathbb{Z}}) = \int_{0}^{\frac{1}{2}} d_{\mathbb{Z}}(-t)\mathrm{e}^{i2n\pi t}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\frac{1}{2}} d_{\mathbb{Z}}(t)\mathrm{e}^{-i2n\pi t}\,\mathrm{d}t$$

Par parité de $d_{\mathbb{Z}}$:

$$c_n(d_{\mathbb{Z}}) = \int_{0}^{\frac{1}{2}} d_{\mathbb{Z}}(t)\mathrm{e}^{i2n\pi t}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\frac{1}{2}} d_{\mathbb{Z}}(t)\mathrm{e}^{-i2n\pi t}\,\mathrm{d}t.$$

Par linéarité de l'intégration :

$$\begin{aligned} c_n(d_{\mathbb{Z}}) &= \int_{0}^{\frac{1}{2}} d_{\mathbb{Z}}(t)\left(\mathrm{e}^{i2n\pi t} + \mathrm{e}^{-i2n\pi t}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{\frac{1}{2}} d_{\mathbb{Z}}(t)2\cos(2n\pi t)\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int_{0}^{\frac{1}{2}} t\cos(2n\pi t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Si $n = 0$, $c_0(d_{\mathbb{Z}}) = 2\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$.

Supposons maintenant $n \neq 0$. Les fonctions composant l'intégrale sont de classe $\mathscr{C}^1$, donc, par intégrations par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} c_n(d_{\mathbb{Z}}) &= 2\left(\left[\frac{1}{2n\pi}t\sin(2n\pi t)\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2n\pi}\sin(2n\pi t)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= 2\left(\frac{-1}{2n\pi}\left[-\frac{1}{2n\pi}\cos(2n\pi t)\right]_0^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{2}{(2n\pi)^2}\left((-1)^n - 1\right) \end{aligned}$$

Finalement, $c_0(d_{\mathbb{Z}}) = \frac{1}{4}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $c_n(d_{\mathbb{Z}}) = \frac{(-1)^n - 1}{2n^2\pi^2}$.

b) Puisque $d_{\mathbb{Z}}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ la série de Fourier converge simplement vers la normalisée de f (théorème de Dirichlet). Comme de plus f est continue, la série de Fourier converge simplement vers $d_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{R}$.

$d_{\mathbb{Z}}$ est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ donc la série de Fourier converge normalement vers $d_{\mathbb{Z}}$. Et de la convergence normale nous déduisons que la série de Fourier converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

c) Par comparaison aux séries de Riemann $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ ($\alpha > 1$), on peut vérifier facilement la convergence des séries en question.

• Puisque la série de Fourier converge simplement vers $d_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{R}$, en particulier en zéro :

$$d_{\mathbb{Z}}(0) = c_0(d_{\mathbb{Z}}) + \sum_{k=1}^{\infty} c_n(d_{\mathbb{Z}})\mathrm{e}^{i2n\pi\times 0} + c_{-n}(d_{\mathbb{Z}})\mathrm{e}^{-i2n\pi\times 0}$$

Autrement dit :

$$0 = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{2n^2\pi^2} + \frac{(-1)^{-n} - 1}{2(-n)^2\pi^2}$$

ce qui équivaut successivement à

$$-\frac{1}{4} = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2 + (-1)^n + (-1)^{-n}}{n^2}$$

En distinguant suivant la parité de n, on obtient $-\frac{1}{4} = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-4}{(2k+1)^2}$ ou encore $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$.
D'où :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - 1.$$

• Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$. En rassemblant les termes d'indices pairs et impairs successifs, on obtient $\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{h=1}^{n}\frac{1}{4h^2} + \frac{1}{(2h+1)^2}$, ce qui équivalent à $\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4}\sum_{h=1}^{n}\frac{1}{h^2} + \sum_{h=1}^{n}\frac{1}{(2h+1)^2}$. Toutes les sommes intervenant dans cette égalité correspondent à des séries convergentes, donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8} - 1.$$

Enfin :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

• Puisque $d_{\mathbb{Z}}$ est continue, nous pouvons utiliser l'égalité de Parseval-Bessel :

$$\|d_{\mathbb{Z}}\|_2^2 = |c_0(d_{\mathbb{Z}})|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|c_n(d_{\mathbb{Z}})|^2 + |c_{-n}(d_{\mathbb{Z}})|^2\right)$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |d_{\mathbb{Z}}(t)|^2\,\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\frac{(-1)^n - 1}{2n^2\pi^2}\right|^2 + \left|\frac{(-1)^{-n} - 1}{2(-n)^2\pi^2}\right|^2\right)$$

$$2\int_0^{\frac{1}{2}} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{16} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left|\frac{2}{2(2k+1)^2\pi^2}\right|^2 + \left|\frac{2}{2(2k+1)^2\pi^2}\right|^2\right)$$

$$2\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{16} + \frac{2}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$$

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{16} = \frac{2}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$$

$$\frac{1}{48}\cdot\frac{\pi^4}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$$

$$\frac{\pi^4}{96} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$$

Enfin

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^4}{96} - 1.$$

• Soit $n \in \mathbb{N}$. En rassemblant les termes d'indices pairs et impairs successifs, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^4} = 1 + \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{16h^4} + \frac{1}{(2h+1)^4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4} = \frac{1}{16}\sum_{h=1}^{n} \frac{1}{h^4} + \sum_{h=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

Toutes les sommes intervenant dans cette égalité correspondent à des séries convergentes donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

$$\frac{15}{16}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

D'où :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

11. a) La relation $\sim$ est clairement réflexive et symétrique. Montrons que $\sim$ est transitive, soient $(x,y,z) \in \Omega^3$ avec $x \sim y$ et $y \sim z$. Notons a, b, c et d des éléments de Ω tels que $(x,y) \in]a,b[$ et $(y,z) \in]c,d[$.

Puisque $y \in]a,b[\cap]c,d[$, $]a,b[\cap]c,d[\neq \emptyset$. Donc $]a,b[\cup]c,d[$ est un intervalle ouvert. Comme $]a,b[\subset \Omega$ et $]c,d[\subset \Omega$, $]a,b[\cap]c,d[$ est un intervalle de Ω qui contient x et y. Autrement dit $x \sim z$ et par conséquent $\sim$ est transitive. Ainsi $\sim$ est une relation d'équivalence.

b) • Par construction tout élément d'une classe d'équivalence admet un voisinage ouvert (l'intervalle $]a,b[$) donc toute classe d'équivalence est un ouvert de $\mathbb{R}$.

• En raisonnant comme pour établir la transitivité il est aisé de s'assurer qu'une classe d'équivalence est connexe par arcs donc connexe. Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

• Les classes d'équivalences formant une partition sont nécessairement disjointes deux à deux.

Les classes d'équivalences sont des intervalles ouverts deux à deux disjoints.

c) Soit $]a,b[$ une classe d'équivalence. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $q \in \mathbb{Q}\cap]a,b[$. Notons I l'ensemble des éléments q ainsi obtenus pour chaque classe $]a,b[$ et notons alors $a_q = a$ et $b_q = b$. Par construction, la famille $\left(]a_q,b_q[\right)_{q\in I\subset\mathbb{Q}}$ est une partition dénombrable de Ω.

12. a) Comme à la question 7., $d_F(x) = \min\left(x - a_{i_0}, b_{i_0} - x\right)$, et comme à la question 8.,

$$d_F(x) = \begin{cases} x - a_{i_0} & \text{si} \quad x \in \left]a_{i_0}, m_0\right] \\ b_{i_0} - x & \text{si} \quad x \in \left]m_0, b_{i_0}\right[\end{cases},$$

où $m_0 = \dfrac{a_{i_0} + b_{i_0}}{2}$.

b) D'après la question précédente d_F est une application affine par morceaux sur $]a_{i_0}, b_{i_0}[$. D'où :

• d_F est dérivable sur $\left]a_{i_0}, m_0\right[$ et pour tout $x \in \left]a_{i_0}, m_0\right[$: $d_F'(x) = 1$.

• d_F est dérivable sur $\left]m_0, b_{i_0}\right[$ et pour tout $x \in \left]m_0, b_{i_0}\right[$: $d_F'(x) = -1$.

• $\displaystyle\lim_{x\to m_0^-} \frac{d_F(x) - d_F(m_0)}{x - m_0} = 1.$

• $\displaystyle\lim_{x\to m_0^+} \frac{d_F(x) - d_F(m_0)}{x - m_0} = -1.$

Ainsi d_F est dérivable sur $]a_{i_0}, b_{i_0}[\setminus\{m_0\}$ et

$$d_F'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \left]a_{i_0}, m_0\right] \\ -1 & \text{si} \quad x \in \left]m_0, b_{i_0}\right[\end{cases}.$$

13. Puisque $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$ et $x \in \overset{\circ}{F}$ sur l'ouvert $\overset{\circ}{F}$, d_F est identiquement nulle. d_F est donc dérivable sur $\overset{\circ}{F}$ est sa dérivée est la fonction nulle.

14. a) On a $\overset{\circ}{F} =]0,1[$, donc $\mathrm{Fr}(F) = F \setminus \overset{\circ}{F} = \{0,1\}$. D'après la question 12, $(d_F)_g'(0) = -1$ et d'après la question 13, $(d_F)_d'(0) = 0$ donc d_F n'est pas dérivable en 0. De même $(d_F)_g'(1) = 0$ et $(d_F)_d'(1) = 1$ donc d_F n'est pas dérivable en 1. Ainsi d_F n'est dérivable en aucun point de $\mathrm{Fr}(F)$.

b) i. Ω est une réunion d'ouverts donc est un ouvert. Donc son complémentaire dans $\mathbb{R}$, qui est F, est un fermé.

Soit $n \geqslant 2$. On a $0 < \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $0 < \dfrac{1}{n} - \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^3}\right) = \dfrac{1}{n^3} \leqslant \dfrac{1}{8} < \dfrac{1}{2}$. Donc $\Omega \subset \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ et comme une réunion d'ouvert est un ouvert $\Omega \subset \left(\left[0, \dfrac{1}{2}\right]\right)^\circ$.

Donc $\Omega \subset \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$. Nous déduisons de ce qui précède que $0 \in F$.

De plus $0 \in \overline{\Omega}$ car 0 est limite de la suite $\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^3}\right)_{n\geqslant 2}$. Donc $0 \notin \complement_{\mathbb{R}}\overline{\Omega} = \overset{\circ}{\left(\complement_{\mathbb{R}}\Omega\right)} = \overset{\circ}{F}$. D'où $0 \in \mathrm{Fr}(F)$.

ii. Montrons que les intervalles $\left]\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^3}, \dfrac{1}{n}\right[$ sont deux à deux disjoints pour $n \geqslant 2$.

Soit $n \geqslant 2$. On a :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n+1} = \frac{n^2(n+1) - (n+1) - n^3}{n^3(n+1)} = \frac{n^2 - n - 1}{n^3(n+1)}$$

D'autre part, $X^2 - X - 1 = \left(X - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Comme $2 > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ donc $n^2 - n - 1 > 0$ si $n \geqslant 2$. Ainsi $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^3}$ et donc les intervalles $\left]\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^3}, \dfrac{1}{n}\right[$ sont disjoints deux à deux. Donc il existe un unique $n \geqslant 2$ tel que

$x \in \left]\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right[$. De plus, d'après ce qui précède,

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} < x < \frac{1}{n}.$$

Donc $n < \frac{1}{x} < n+1$ et par conséquent $n = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

iii. Soit $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. Deux cas sont possibles :

• Si $x \in F$, alors $d_F(x) = 0$ et l'inégalité proposée est vraie quelque soit C.

• Si $x \in \Omega$, d'après les questions précédentes, il existe $n \geqslant 2$ tel que $x \in \left]\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right[$. Donc

$$d_F(x) \leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\right)\right] \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^3}.$$

Puisque $n = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$, alors $d_F(x) \leqslant \frac{1}{2}x^3$.

iv. D'après la question 14.(b)i, $0 \in F$ donc $d_F(0) = 0$. D'où, pour tout $x > 0$, on a :

$$\frac{d_F(x) - d_F(0)}{x - 0} = \frac{d_F(x)}{x} \leqslant \frac{1}{2}x^2.$$

Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{d_F(x) - d_F(0)}{x - 0} = 0$. Ainsi d_F est dérivable à droite en 0 et $(d_F)'_d(0) = 0$.

v. Puisque $d_F(x) = 0$ pour tout $x \in F$, d_F est dérivable à gauche en 0 et $(d_F)'_g(0) = 0$. En tenant compte du résultat de la question précédente, d_F est dérivable en 0.

Partie III : Étude de cas particuliers en dimension n

15. a) Il est évident que $d_F(x) = \|x - x_0\|$. Si $\|x - x_0\| = 0$ alors $x = x_0$. la réciproque étant immédiate. Ainsi, pour tout $x \in E$, $\Gamma(x) = \{x\}$.

b) Soient $(x, h) \in E^2$, on a :

$$g(x+h) = \|x + h - x_0\|^2 = \|x - x_0 + h\|^2.$$

Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire

$$\begin{aligned} g(x+h) &= \|x - x_0\|^2 + 2(x - x_0|h) + \|h\|^2 \\ g(x+h) &= g(x) + (2(x - x_0)|h) + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|) \end{aligned}$$

Donc g est dérivable en tout x de E et $\nabla f(x) = 2(x - x_0)$.

c) La fonction g est différentiable sur $E \setminus \{x_0\}$ et strictement positive. La fonction $\sqrt{.}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc $d_F = \sqrt{g}$ est différentiable sur $E \setminus \{x_0\}$ et

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(d_F)_a(h) &= \mathrm{d}(\sqrt{g})_a(h) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{g(a)}} \times (2(a - x_0)|h) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\|a - x_0\|^2}} \times (2(a - x_0)|h) \\ &= \left(\frac{1}{\|a - x_0\|}(a - x_0)\middle| h\right) \end{aligned}$$

Ainsi d_F est différentiable sur $E \setminus \{x_0\}$ et $\forall a \in E \setminus \{x_0\}$, $\nabla d_F(a) = \frac{1}{\|a - x_0\|}(a - x_0)$.

d) i. Puisque d_F est supposée différentiable en x_0 et $d_F(x_0) = 0$, alors la définition de la différentielle donne, pour tout $h \in E$:

$$d_F(x_0 + th) = (\nabla d_F(x_0)|th) + \|th\|\varepsilon(th)$$

avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(th) = 0$. Donc

$$d_F(x_0 + th) = t(\nabla d_F(x_0)|h) + \underset{t \to 0}{\mathrm{o}}(t).$$

où $\mathrm{o}(t) = |t|\|h\|\varepsilon(th)$.

ii. Soit $h \in E$. De la question précédente nous déduisons $\|x_0 + th - x_0\| = t(\nabla d_F(x_0)|h) + \underset{t \to 0}{\mathrm{o}}(t)$, et donc $|t| \cdot \|h\| = t(\nabla d_F(x_0)|h) + \underset{t \to 0}{\mathrm{o}}(t)$ ou encore

$$\|h\| = \mathrm{sgn}(t)(\nabla d_F(x_0)|h) + \underset{t \to 0}{\mathrm{o}}(1).$$

Les limites à droite et à gauche en $t = 0$ ne coïncident pas, donc nécessairement, $(\nabla d_F(x_0)|h) = 0$. Ainsi : $\forall h \in E$, $(\nabla d_F(x_0)|h) = 0$, donc $\nabla d_F(x_0) = 0$.

D'après la question 15.(c) $\|\nabla d_F(a)\| = 1$ pour tout $a \in E \setminus \{x_0\}$. Nous en déduisons (la norme étant continue) : $\|\nabla d_F(a)\| \underset{a \to x_0}{\longrightarrow} 1$ ce qui contredit la nullité du gradient en x_0.

L'hypothèse d_F est différentiable en x_0 conduit à une contradiction. Nous avons démontré en raisonnant par l'absurde que d_F n'est pas différentiable en x_0.

16. a) Soit $x \in E$. Notons p la projection orthogonale sur F. Soit $f \in F$. Montrons que $p(f) \in \Gamma(x)$. Puisque par construction $(x - p(x)) \perp (p(x) - f)$, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\|x - f\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - f\|^2 \geq \|x - p(x)\|^2$$

D'où $\forall f \in F$, $\|x - f\| \geqslant \|x - p(x)\|$ avec égalité si, et seulement si, $f = p(x)$. Donc $p(x)$ est l'unique élément de F qui rélise le minimum, d'où

$$\forall x \in E,\ \Gamma(x) = \{p(x)\}.$$

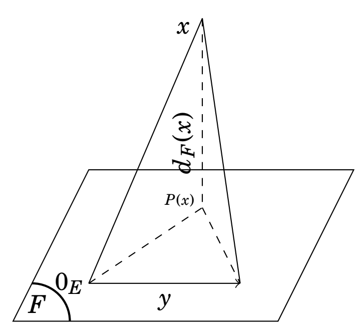

FIGURE 3 – La projection orthogonale sur F

b) On a $\forall x \in E$, $d_F^2(x) = \|x - p(x)\|^2$. p est linéaire, donc d_F est différentiable comme composé des applications $\|.\|^2$ et $Id_E - p$. De plus, d'après la question 15.b), $\forall (a, h) \in E^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(d_F^2)_a(h) &= 2(a - p(a)|h - p(h)) \\ &= 2(a - p(a)|h)) - 2(a - p(a)|p(h)). \end{aligned}$$

Or $a-p(a)$ et $p(a)$ sont orthogonaux, donc $(a-p(a)|p(h))=0$. Ainsi $\nabla d_F^2(a)=2(a-p(a))$.

c) Procédons comme dans la question 15.(c). $d_F=\sqrt{d_F^2}$ est différentiable sur $E\setminus F$ et $\forall a\in E\setminus F$, $\forall h\in E$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(d_F)(a) &= \mathrm{d}\left(\sqrt{d_F^2}\right)_a(h)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{d_F^2(a)}}\times(2(a-\pi(a))\mid h)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{\|a-\pi(a)\|^2}}\times(2(a-\pi(a))\mid h)\\ &= \left(\frac{1}{\|a-\pi(a)\|}(a-\pi(a))\;\middle|\; h\right)\end{aligned}$$

Ainsi d_F est différentiable sur $E\setminus F$ et $\forall a\in E\setminus F$, $\nabla d_F(a)=\dfrac{1}{\|a-\pi(a)\|}(a-\pi(a))$.

d) i. Puisque d_F est supposé différentiable en a et $d_f(a)=0$, alors pour tout $t\in_R$, on a :

$$d_F(a+th)=(u|th)+\underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)$$

De plus $d_F(a+th)=\|a+th-\pi(a+th)\|=\|th\|$, car $a\in F$ et $th\in F^\perp$. Donc

$$\|th\|=(u|th)+\underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)$$

ou encore

$$\|h\|=\mathrm{sgn}(t)\langle u|h\rangle+\underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(1)$$

En particulier en passant à la limite quand t tend vers 0^+, on obtient :

$$\|h\|=(u|h).$$

ii. le terme à droite dans l'égalité $\|h\|=\langle u|h\rangle$ est linaire, par contre $h\mapsto\|h\|$ n'est pas linaire, il y a donc une contradiction. En conclusion, d_F n'est pas différentiable sur F.

17. Étude d'un cas particulier.

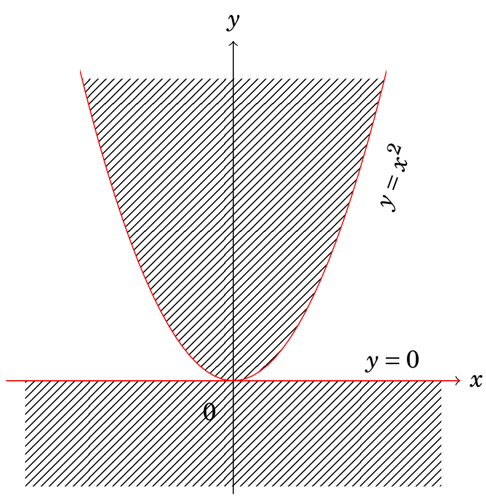

FIGURE 4 – L'allure de F

a)

b) Soit $\varphi_1:(x,y\mapsto y$ et $\varphi_2:(x,y\mapsto y-x^2$. φ_1 et φ_2 sont des fonctions polynomiales, donc continues sur $\mathbb{R}^2$. Comme $F=\varphi_1^{-1}(\mathbb{R}^-)\cup\varphi_2^{-1}(\mathbb{R}^+)$ et $\mathbb{R}^-$ et $\mathbb{R}^+$ sont fermés, alors F est fermé comme réunion de deux fermés.

c) Il est clair que $(0,0)\in F=\overline{F}$. Mais $(0,0)\notin\mathring{F}$ puisque $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n^4}\right)\notin F$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n^4}\right)=(0,0)$. Donc $(0,0)\in\mathrm{Fr}(F)$.

d) Si $u\in F$, $d_F(u)=0\le\|u\|^2$. Si $u\in\mathbb{R}^2\setminus F$, écrivons $u=(a,b)$, $(a,0)\in F$. Or $d_F(u)\le\|u-(a,0)\|=|b|$. Par définition $0<b<a^2$ donc $d_F(u)\le b^2\le\|u\|^2$.

e) On a $d_F(u)=0+0+\|u\|\varepsilon(u)$ avec $\lim\limits_{u\to 0}\varepsilon(u)=0$, donc d_F est différentiable en 0 et $\nabla d_F(0)=0$.

Partie IV : Distance à la sphère unité

18. a) a et u sont colinéaires, alors $\mathrm{Vect}(a,y)$ contient les trois vecteurs, c'est un plan ou une droite.

b) On a $x\in S=F\cap\mathscr{P}\Leftrightarrow\|x\|=1$ et $x\in\mathscr{P}$. Donc est le cercle unité de $\mathscr{P}$.

c) Soit $v\in\mathscr{P}$ tel que (u,v) soit une base orthonormée de $\mathscr{P}$. Posons $y=\cos(\theta)u+\sin(\theta)v$. Alors $\|a-y\|^2=(\|a\|-\cos(\theta))^2+\sin^2(\theta)=\|a\|^2+1-2\|a\|\cos(\theta)$. Cette quantité est minimal pour $\cos(\theta)=1$, c'est-à-dire $\theta\equiv 0[2\pi]$, ce qui équivalent à $y=u$. Ainsi $\Gamma(a)=\{u\}$.

19. • Si $a\neq 0$, $d_F(a)=\|a-\dfrac{1}{\|a\|}a\|=\left|1-\dfrac{1}{\|a\|}\right|\|a\|=|\|a\|-1|$.

• Si $a=0$, $\forall y\in F$, $\|y-0\|=1$ ou encore $d_F(0)=1=|\|a\|-1|$.

20. Pour $a\neq 0$, $\|.\|$ est différentiable en a, et si de plus $a\notin F$, $\|a\|-1\neq 0$ et $|.|$ est différentielle sur $\mathbb{R}^*$. Par composition, $\mathrm{d}(d_F)_a(h)=\mathrm{sign}(\|a\|-1)\left(\dfrac{a}{\|a\|}\middle|h\right)$ de sorte que $\nabla d_F(a)=\mathrm{sign}(\|a\|-1)\dfrac{a}{\|a\|}$.

21. D'après la question 19., $\Gamma(0_E)=F$.

22. On a $d_F(a+tu)=|\|a+tu\|-1|=||1+t|\|a\|-1|=||1+t|-1|=|t|$ si $t\ge -1$. Si d_F est différentiable en 0, alors $t\mapsto d_F(a+ta)$ est dérivable en 0 par composition, donc $t\mapsto|t|$ est dérivable en 0 ce qui est contradictoire.

23. a) Pour $t\in]-1,1[$, on a

$$\varphi(t)=d_F(tv)=|\|tv\|-1|=||t|\|v\|-1|=||t|-1|=1-|t|.$$

Donc φ n'est pas dérivable en 0.

b) On a $\varphi=d_F\circ L$ avec $L:t\mapsto tv$ linéaire donc différentiable. Si d_F était différentiable en 0, φ serait dérivable par composition, ce qui est absurde.

Partie V : Une condition nécessaire de différentiabilité à l'extérieur de F

24. a) L'application d_F étant 1-lipschitzienne, donc

$$|d_F(a+tu)-d_F(a)|\le\|a+tu-a\|=|t|\|u\|.$$

En particulier, si $t>0$, $d_F(a+tu)-d_F(a)\le t\|u\|$.

b) d_F étant différentiable en a, l'inégalité précédente entraîne $\lim_{t\to 0^+}\dfrac{d_F(a+tu)-d_F(a)}{t} \leq \|u\|$, ou encore $(\nabla d_F(a)|u) \leq \|u\|$, donc $\|u\|^2 \leq \|u\|$ et par conséquent $\|u\| \leq 1$.

25. a) Dans ces conditions $a-x$ et $x-y$ sont colinéaires, donc l'inégalité triangulaire est une égalité $\|a-y\| = \|a-x+x-y\| = \|a-x\|+\|x-y\|$, d'où

$$\|x-y\| = d_F(a)-\|a-x\|.$$

b) Comme d_F est 1-lipschitzienne, alors $d_F(a)-\|a-x\| \leq d_F(x)$, d'où $d_F(x) \leq \|x-y\| = d_F(a)-\|a-x\| \leq d_F(x)$, par conséquent

$$d_F(x) = \|x-y\|.$$

26. a) Le vecteur $a-tv$ s'écrit sous la forme $\left(1-\dfrac{t}{d_F(a)}\right)a+\dfrac{t}{d_F(a)}y$, d'après le résultat de la question précédente

$$\begin{aligned} d_F(a-tv) &= \|a-tv-y\| = d_F(a)-\|a-tv+a\| \\ &= d_F(a)-t\|v\|. \end{aligned}$$

Mais $d_F(a) = \|a-y\|$, donc $\|v\| = 1$. Ainsi $d_F(a-tv) = d_F(a)-t$.

b) Pour $t \in \left]0,\dfrac{1}{d_F(a)}\right[$ on a $\dfrac{d_F(a-tv)-d_F(a)}{-t} = 1$. d_F étant différentiable en a, $\lim_{t\to 0}\dfrac{d_F(a-tv)-d_F(a)}{-t} = (\nabla d_F(a)|v) = 1$, d'où $(u|v) = 1$.

D'autre part, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $(u|v) \leq \|u\|\|v\|$ et d'après ce qui précède $\|u\| \leq 1$ et $\|v\| = 1$. Donc nécessairement $\|u\|\|v\| = 1$.

c) Dans la question précédente, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité, donc u et v sont colinéaires, d'où l'existence d'un réel λ tel que $a-y = \lambda(a-\pi(a))$ avec $|\lambda| = 1$, donc $a-y = a-\pi(a)$ et donc $y = \pi(a)$ ou bien $a-y = \pi(a)-a$ ce qui impossible puisque $(u|v) = 1 > 0$. En conclusion $\Gamma(a) = \{\pi(a)\}$.

Partie VI : Étude de la réciproque

27. a) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, il est de même de la suite $\left(\|x_p-a\|\right)_{p\in\mathbb{N}}$, donc elle est bornée, d'où l'existence de M.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \|y_p\| &\leq \|y_p-a\|+\|a\| \\ &\leq \|y_p-x_p\|+\|x_p-a\|+\|a\| \\ &\leq d_F(x_p)+\|x_p-a\|+\|a\|. \end{aligned}$$

Or d_F est continue (car 1-lipschitzienne) et $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge, donc le majorant a une limite et par conséquent la suite $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est borné.

b) L'espace E étant de dimension finie, donc de toute suite bornée on peut extraire une suite convergente, en particulier $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence.

c) $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de F ($y_p \in \Gamma(x_p) \subset F$) qui est fermé, donc l la valeur d'adhérence de la suite $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ reste dans F. Comme $y_p \notin V$, alors d'après la caractérisation des valeurs d'adhérence d'une suite, $l \notin V$. Ainsi $l \in F \cap (E\setminus V)$.

d) On a $|d_F(a)-dF(x_p)| \leq \|a-x_p\| \leq M$ d'où $\|x_p-y_p\| = d_F(x_p) \leq M+d_F(a)$.

Considérons des suites extraites $k \to x_{\varphi(k)}, k \to y_{\varphi(k)}$ convergent respectivement vers a, l. $d_F(x_{\varphi(k)}) = \|x_{\varphi(k)}-y_{\varphi(k)}\|$ et, par limite $d_F(a) = \|a-l\|$. Comme $l \in F$ il vient $l \in \Gamma(a)$ d'où $l = \pi(a)$.

Ceci est en contradiction avec les données puisque $l = \pi(a) \in V$ et $l \notin V$, d'après la question 27.c).En conclusion,

$$\forall V \in \mathscr{V}\pi(a)),\ \exists U \in \mathscr{V}(a),\ \forall x \in U,\ \Gamma(x) \subset V.$$

28. a) Comme $a \notin F$ et $\pi(a) \in F$, alors $\pi(a) \neq a$ et donc $R = \|a-\pi(a)\| > 0$.

Soit $y \in \overline{B}(a,R) \cap F$, alors $\|a-y\| \leq R = \|a-\pi(a)\| = d_F(a)$, donc $d_F(a) = \|a-y\|$ et par conséquent $y \in \Gamma(a) = \{\pi(a)\}$, donc $y = \pi(a)$, ainsi $\overline{B}(a,R) \cap F = \{\pi(a)\}$.

b) i. Il est clair que $\varphi(t) = \alpha t^2+2\beta t+\gamma$ avec $\alpha = \|x-y\|^2$, $\beta = (x-a|y-x)$, $\gamma = \|x-a\|^2-R^2$. C'est un polynôme de second degré puisque $\alpha = d_F(x)^2 > 0$ ($x \notin F$ car $\overline{B}(a,R) \cap F = \{\pi\}$).

Les deux racines sont données par les formules classiques

$$\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{\alpha}$$

et

$$\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{\alpha}.$$

On a $\gamma = \|x-a\|^2-R^2 = \|x-a\|^2-d_F(a) \leq 0$ et $\alpha > 0$, donc $\beta^2-\alpha\gamma \geq \beta^2$, la première racine du polynôme est donc positive.

ii. Soit $(1-t)x+ty \in [x,y] \cap S(a,R)$ avec $t \in [0,1]$, donc $\|(1-t)x+ty-a\|^2 = R^2$ d'où $\varphi(t) = 0$. Donc t est l'une des deux racines de φ et comme $t \geq 0$ alors $[x,y] \cap S(a,R)$ est un singleton.

iii. On a $\varphi(t_{x,y}) = \|(1-t_{x,y})x+t_{x,y}y-a\|^2-R^2 = \|p(x,y)-a\|^2-R^2 = 0$, car $p(x,y) \in S(a,R)$. De plus

$$t(x,y) = \frac{-\beta(x)+\sqrt{\beta^2(x)-\alpha(x)\gamma(x)}}{\alpha(x)},$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= d_F(x)^2 \\ \beta(x) &= (x-a,x-y)\ \ (y \text{ est une fonction de } x) \\ \gamma(x) &= \|x-a\|^2-R^2 \end{aligned}$$

c) On a $p(x,y)-y = (1-t_{x,y})(x-y)$. Montrons que la limite de $t_{x,y}$ quand x tend vers a est 1.

En effet, puisque $y \in \Gamma(x)$ on a $A = d_F(x)^2$ et d_F est continue en a, et $d_F(a) \neq 0$ d'où la limite en a de $\dfrac{1}{\alpha}$

qui vaudra $\dfrac{1}{d_F(a)^2}$ ou $\dfrac{1}{R^2}$.

D'après Cauchy-Schwarz, on a

$$|(x-a|y-x)| \le \|x-a\| d_F(x),$$

donc la limite en a de β est 0.

Enfin la limite de γ en a est $-R^2$ donc la limite de $\sqrt{\beta^2(x)-\beta(x)\gamma(x)}$ est $\sqrt{R^4}$.

La limite du zéro positif du polynôme est donc 1, ainsi $\forall y \in \Gamma(x)$, $\lim\limits_{x\to a}(p(x,y)-y=0$ et par conséquent $\forall \varepsilon>0, \exists \eta>0, \forall x \in B(a,R), \|x-a\|<\eta \Rightarrow \forall y \in \Gamma(x), \|p(x,y)-y\|<\varepsilon$.

d) Soit $V \in \mathscr{V}(\pi(a))$.

D'après la question précédente $\forall \varepsilon>0$, il existe $U \in \mathscr{V}(a)$ tel que $\forall x \in U_1$ on a, pour tout $y \in \Gamma(x)$, $p(x,y) \in B(y,\varepsilon)$.

D'après la question 27., il existe $U_2 \in \mathscr{V}(a)$ tel que $\forall x \in U_2$, $\Gamma(x) \subset V$. Donc $\forall y \in \Gamma(x)$, $p(x,y) \in B(y,\varepsilon) \cap \Gamma(x) \subset V$.

Ainsi, $\forall V \in \mathscr{V}(a)$, $\exists U \in \mathscr{V}(a)$, $\forall x \in U$, $\forall y \in \Gamma(x)$, $p(x,y) \in V$.

29. a) Soit $x \in B(a,R)$, on a :

$$\begin{aligned}
&\|x-p(x,y_x)\|^2-\|a-p(x,y_x)\|^2\\
&=(x-p(x,y_x)|x-p(x,y_x))-\|a-p(x,y)\|^2\\
&(x-a+a-p(x,y_x)|x-a+a-p(x,y_x))-\|a-p(x,y)\|^2\\
&=\|x-a\|^2+2(x-a|a-p(x,y_x)
\end{aligned}$$

b) On a

$$(x-a|a-p(x,y_x)=(x-a|a-\pi(a))+(x-a|\pi(a)-p(x,y_x)),$$

donc il suffit de montrer que

$$(x-a|\pi(a)-p(x,y_x))=o(\|x-a\|).$$

En effet,

$$|(x-a|\pi(a)-p(x,y_x))| \le \|x-a\|\,\|\pi(a)-p(x,y_x)\|,$$

et d'après le résultat de la question 28.d) $\lim\limits_{x\to a}\|\pi(a)-p(x,y_x)\|=0$, donc $(x-a|\pi(a)-p(x,y_x))=o(\|x-a\|)$.

30. Puisque $p(x,y) \in [x,y], y \in \Gamma(x), \pi(x) \in F, p(x,y) \in S(a,R)$ on a

$$\|x-p(x,y)\|^2 \le \|x-y\|^2 = d_F^2(x) \le \|x-\pi(a)\|^2 = \|x-a+a-\pi(a)\|^2$$

et

$$d_F(a)^2=\|a-\pi(a)\|^2=R^2=\|a-p(x,y)\|^2$$

d'où

$$\|x-\pi(x)\|^2-\|a-\pi(x)\|^2 \le d_F^2(x)-d_F^2(a) \le \|x-a\|^2+2(x-a|a-\pi(a))$$

et la question précédente permet d'avoir un $o(\|x-a\|)$ de chaque côté de l'encadrement de

$$d_F^2(x)-d_F^2(a)-2(x-a|a-\pi(a)).$$

31. L'égalité de la question précédente montre que d_F^2 est différentiable en a et que sa différentielle est donnée par $\mathrm{d}(d_F^2)_a : h \mapsto 2(h|a-\pi(a))$. d_F^2 étant à valeurs strictement positifs sur $E \setminus F$ en particulier dans un voisinage de a, donc par composition $d_F=\sqrt{d_F^2}$ est différentiable en a et sa différentielle est donnée par

$$\mathrm{d}(d_F)_a : h \mapsto \frac{(h|a-\pi(a)}{\|a-\pi(a)\|}=\frac{(h|a-\pi(a)}{d_F(a)}.$$

32. D'après l'étude précédente, d_F est différentiable en tout point de Ω et sa différentielle en tout point x de Ω est donnée par : $\mathrm{d}(d_F)_x : h \mapsto \dfrac{(h|x-y_x)}{d_F(x)}$.

Partie VII : Une condition nécessaire de différentiabilité en un point de F

33. a représente un minimum local de la fonction d_F sur l'ouvert F et comme d_F est différentiable en a, alors sa différentielle est nulle, ainsi $\nabla(d_F)(a)=0$.

34. a) Par différentiabilité, on a

$$d_F(a+h)=d_F(a)+(h|\nabla(d_F)(a)+\|h\|\varepsilon(h)$$

où $\lim\limits_{h\to 0}\delta(h)=0$, en particulier

$$d_F(a-tu)=(-tu|u)+|t|\delta(t)=-t\|u\|^2+t\varepsilon(t)$$

où $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$.

b) Si $\nabla(d_F)(a)=u\neq 0$, alors

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{d_F(a-tu)}{t\|u\|}=\lim_{t\to 0^+}\left(-\|u\|+\frac{|t|}{t}\frac{\varepsilon(t)}{\|u\|}\right)=-\|u\|<0.$$

Donc la fonction $t \mapsto \dfrac{d_F(a-tu)}{t\|u\|}$ est de signe négative dans un voisinage à droite de 0, ce qui est absurde. En conclusion, si d_F est différentiable dans un point $a \in F$, alors cette différentielle est nulle.

••••••••